Осцилляции нейтрино

М.М. Кирсанов

1 Введение

Одной из важнейших проблем физики на протяжении последних более чем 40 лет является проблема смешивания и осцилляций нейтрино. Смешивание состоит в том, что нейтринные квантовые состояния определенного аромата (то есть обладающие определенным взаимодействием) могут не иметь определенной массы. а быть суперпозицией нескольких состояний с различными массами.

Гипотеза осцилляций нейтрино была выдвинута Б. Понтекорво [1, 2]. Обсуждая эксперименты с реакторными нейтрино, Б. Понтекорво высказал предположение, что лептонное число может быть не строго сохраняющимся и что квантовый вектор слабовзаимодействующего нейтрино может быть суперпозицией квантовых векторов Майорановских нейтрино с ненулевыми и различными массами. Это предположение было основано на глубокой и нетривиальной аналогии с нейтральными каонами. В следующих работах [3] было введено понятие стерильных нейтрино, то есть обсуждались переходы, в которых получались невзаимодействующие (и поэтому практически ненаблюдаемые) частицы.

В 1969 году Грибов и Понтекорво создали первую теорию осцилляций нейтрино [4], которая была развита в [5].

После наблюдения нейтральных токов и очарованных частиц опять появились статьи по нейтринным осцилляциям [6]. Основываясь на кварк - лептонной аналогии, авторы этих работ предполагали, что лептоны входят в гамильтониан в смешанной форме. Такая схема, симметричная относительно кварков и лептонов в рамках Стандартной Модели, была рассмотрена Кобаяши-Маскава в 1973 году [7].

Ненулевые массы нейтрино и нейтринные осцилляции представляются естественными многим физикам благодаря тому факту, что они логично появляются во многих теориях великого объединения [8]. Очень важной была также фундаментальная работа Михеева - Смирнова [9] о резонансном превращении в веществе. Эта работа помогает решить проблему солнечных нейтрино.

Во многих рассуждениях об осцилляциях нейтрино в 1990 - 1999 годах утверждалось, что если проблема солнечных нейтрино решается осцилляциями в веществе, то механизм качелей (see-saw) указывает на то, что наиболее вероятная масса тау нейтрино должна быть порядка 10 eV, что делает его привлекательным кандидатом на объяснение темной массы Вселенной. При такой массе осцилляции в тау нейтрино должны наблюдаться на ускорителях в обычных экспериментах, то есть с короткой базой. Большое количество таких экспериментов было проведено в указанный выше период.

2 Теория смешивания нейтрино и нейтринных осцилляций

2.1 Смешивание нейтрино с дираковскими массами

Лагранжиан слабых взаимодействий в Стандартной Модели [10] состоит из нейтральных и заряженных токов лептонов и кварков. Заряженный ток выглядит так:

$$j_\alpha^{(+)} = 2\sum_l \overline{\nu_{lL}}\gamma_\alpha l_L + 2\Sigma_q \overline{Q_{qL}}\gamma_\alpha(\sum_{q'} U_{qq'}q'_L), \tag{1}$$

где l - поколение лептонов, l=e,μ,τ, ν_l - нейтрино поколения l (с ароматом l, или типа l), q - нижние кварки, q=d,s,b, Q_q - верхние кварки, $Q_d = u$, $Q_s = c$, $Q_b = t$, U - унитарная матрица смешивания кварков [7]. В заряженном токе присутствуют только левые компоненты лептонов и кварков.

Предположим сначала [10], [11], что нейтринный массовый член аналогичен кварковому массовому члену Стандартной Модели:

$$L = -\overline{\nu'_R}M\nu'_L, \quad \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \\ ... \end{pmatrix}, \ \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \\ ... \end{pmatrix} \tag{2}$$

Число типов нейтрино равно n, матрица M - общего вида $n \times n$ матрица. Лагранжиан 2 не сохраняет лептонные числа по отдельности, но сохраняет суммарный лептонный заряд $\sum_l L_l$.

Массовый член 2 называется дираковским массовым членом. Вообще, поле ν_k является дираковским, если не только массовый член 2, но и весь Лагранжиан инвариантен относительно глобального преобразования U(1)

$$\nu_l \to e^{i\phi}\nu_l, \quad l \to e^{i\phi} l (l = e, \mu, \tau), \tag{3}$$

где фаза ϕ - одна и та же для нейтрино и для заряженных лептонных полей. Из этой инвариантности следует сохранение суммарного лептонного заряда (Noether theorem). Таким образом, лептонный заряд - квантовое число, которое отличает нейтрино от антинейтрино.

Дираковский массовый член 2 допускает такие процессы как $\mu \to e\gamma$. Однако вклад смешивания нейтрино в такие процессы пренебрежимо мал [12] - [14].

Массовый член 2 можно привести к стандартному виду. Произвольную матрицу, детерминант которой отличен от нуля, можно привести к диагональному виду с помощью биунитарного преобразования (см. Appendix A1)

$$M = VmU^{+}, \tag{4}$$

где V и U - унитарные матрицы. Подставляя (3) в (2), получаем

$$L^D = -\overline{\nu_R} m \nu_L + h.c. = -\bar{\nu} m \nu, \tag{5}$$

здесь $\nu_L = U^{+}\nu'_L$, $\nu_R = V^{+}\nu'_R$, $\nu = \nu_L + \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \ldots \\ \nu_n \end{pmatrix}$.

Из (4) получаем:

$$\nu'_L = U\nu_L, \tag{6}$$

то есть токовые левые поля нейтрино представляют собой линейные комбинации левых компонент полей дираковских нейтрино с определенными, отличными от нуля массами.

Унитарная матрица 3×3 может быть представлена через 3 угла смешивания и 6 фаз. Однако только одна фаза измерима. Это обусловлено тем, что в Стандартной Модели матрица U входит только в Лагранжиан заряженных токов. Поскольку фазы дираковских полей произвольны, можно исключить из матрицы U пять фаз путем переопределения фаз полей заряженных лептонов и нейтрино. Одна оставшаяся фаза вызывает нарушение CP-инвариантности в лептонном секторе.

Удобная параметризация матрицы U предложена в [15]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $c_{ij} = cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = sin\theta_{ij}$, δ_{ij} - CP-нарушающая фаза.

Из этого представления видно, что CP нарушение мало, если угол θ_{13} мал. Вообще, можно показать, что CP нарушение исчезает, если один из элементов матрицы равен нулю.

Массовый член 2 может быть сгенерирован Хиггсовским механизмом с помощью обычного дублета Хиггсовских бозонов, которые отвечают за генерацию масс кварков и заряженных лептонов.

Если имеет место смешивание 6, то в пучках нейтрино возникают осцилляции между ν_l и $\nu_{l'}$.

2.2 Смешивание нейтрино с майорановскими массами

Массовый член 2 строится как с помощью токовых левых полей ν_{lL}, так и с помощью правых полей ν_{lR}, не входящих в слабые токи стандартной теории. В этом смысле схема с массовым членом 2 не является экономной схемой. Можно, однако, так построить схему смешивания нейтрино, чтобы в нейтринный массовый член входили только токовые левые компоненты ν_{lL}. Такую схему впервые построили Грибов и Понтекорво [4].

Зарядово-сопряженный спинор ψ^c определяется так:

$$\psi^c = C\overline{\psi}^T. \tag{8}$$

Матрица C имеет следующие свойства:

$$C^{-1}\gamma_\alpha C = -\gamma_\alpha^T, \quad C^T = -C, \quad C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^T, \quad \overline{\psi^c} = -\psi^T C^{-1}. \tag{9}$$

Из 8 - 9 следует:

$$(\psi_L)^c = \psi_R^c \qquad (\psi_R)^c = \psi_L^c \tag{10}$$

Это можно проверить например так:

$$\frac{(1+\gamma_5)}{2}(\psi_L)^c = CC^{-1}\frac{(1+\gamma_5)}{2}C\overline{\psi_L}^T = C\left(\overline{\psi_L}\frac{(1+\gamma_5)}{2}\right)^T = C\overline{\psi_L}^T = (\psi_L)^c \tag{11}$$

Здесь используется представление, в котором $(1-\gamma_5)$ дает левую компоненту спинора ψ или правую компоненту $\overline{\psi}$ (в книгах Окуня наоборот, $(1+\gamma_5)$ дает левую компоненту).

Учитывая 10, можно построить из токовых левых компонент нейтрино следующий массовый член:

$$L^M = -\frac{1}{2}\overline{(\nu_L)^c} M \nu_L + h.c.\ , \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \\ \ldots \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где M - комплексная $n \times n$ матрица

Используя свойства матрицы C, можно показать (см. Appendix A2), что M - симметричная матрица, $M^T = M$, поэтому ее можно привести к диагональному виду с помощью одной унитарной матрицы:

$$M = (U^+)^T m U^+ \tag{13}$$

Подставляя 13 в 12, получаем:

$$L^M = -\frac{1}{2}\left(\overline{(\nu_L)^c} m \nu_L + \overline{\nu_L} m (\nu_L)^c\right), \tag{14}$$

где

$$\nu_L = U^+ \nu_L'. \tag{15}$$

окончательно получаем:

$$L^M = -\frac{1}{2}\bar{\chi} m \chi, \tag{16}$$

здесь

$$\chi = \nu_L + (\nu_L)^c = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \ldots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \quad \chi^c = \chi. \tag{17}$$

χ_i - поле нейтрино Майораны с массой m_i Массовый член 16 не сохраняет не только лептонные числа по-отдельности, но и сумму лептонных чисел. Поэтому частицами с определенными массами являются нейтрино Майораны - истинно нейтральные частицы со спином 1/2. Массовый член 16 носит название майорановского массового члена. Из 17 и 15 получаем:

$$\nu'_L = U\chi_L. \tag{18}$$

Таким образом, в случае майорановского массового члена n левых токовых нейтринных полей представляют собой линейные ортогональные комбинации n левых компонент нейтрино с майорановскими массами.

Смешивание 18 также приводит к осцилляциям между ν_l и $\nu_{l'}$. Отличие смешивания 18 от 6 состоит в том, что становятся возможными такие несохраняющие суммарный лептонный заряд процессы, как безнейтринный двойной бета-распад.

Признак майорановских нейтрино - условие Майораны $\chi^c = \chi$ вместо условия 3. Оно означает, что произвольное изменение фаз полей майорановских нейтрино не допускается. Поэтому в случае трех поколений из шести фаз матрицы смешивания можно исключить только три. Однако дополнительные две фазы никак не проявляются в осцилляциях в вакууме и в веществе.

2.3 Дираковский и майорановский массовый член

Можно построить лагранжиан, в который входят как дираковский, так и майорановский массовые члены [16] - [20]. При этом туда может входить также майорановский массовый член, который строится только из правых компонент ν_{lR}. Такой общий массовый член L^{D+M} имеет вид:

$$L^{D+M} = -\frac{1}{2}\overline{(n_L)^c}Mn_L + h.c., \tag{19}$$

где

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ (\nu'_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ \nu'_L \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_L & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \tag{21}$$

Поскольку матрица M - симметричная матрица, диагонализация проводится так же, как для массового члена 12. Получим:

$$L^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{\chi} m \chi, \quad \chi = U^+ n_L + (U^+ n_L)^c = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ . \\ . \\ \chi_{2n} \end{pmatrix}, \quad \chi^c = \chi, \tag{22}$$

то есть мы имеем 2n майорановских нейтрино

$$n_L = U \chi_L. \tag{23}$$

Массовый член 22 не инвариантен относительно любого глобального изменения фаз, то есть в этом случае нет сохраняющихся квантовых чисел, отличающих частицу от античастицы.

Таким образом, n токовых компонент нейтрино представляют собой линейные комбинации 2n левых компонент полей массивных майорановских нейтрино. Поля ν_L^c, ν_R, не входящие в лагранжиан стандартной теории, являются линейными комбинациями тех же 2n левых компонент полей массивных майорановских нейтрино. Поэтому кроме осцилляций между ν_{lL} и $\nu_{l'L}$ возможны осцилляции между активными и стерильными нейтрино (не участвующими в стандартном слабом взаимодействии).

Для генерации всех трех частей массового члена 19 необходим не только Хиггсовский дублет, но также триплет ([21] - [23]) и синглет. Это возможно только в моделях за пределами Стандартной модели. Типичный пример - модель SO(10).

2.4 Случай одного поколения [24]

Рассмотрим массовый член 19 в случае одного поколения. Предположим, что имеет место CP - инвариантность. В этом случае $M^+ = M$, следовательно $M^* = M$. Для вещественной симметричной матрицы имеем:

$$M = Om'O^T, \tag{24}$$

где O - ортогональная матрица, а $m'_{ik} = m'_i\delta_{ik}$, где m'_i - корни уравнения на собственные значения $det(M - m') = 0$:

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_L + m_R \mp \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}) \tag{25}$$

Ортогональная 2×2 матрица имеет следующий общий вид:

$$O = \begin{pmatrix} cos\Theta & -sin\Theta \\ sin\Theta & cos\Theta \end{pmatrix} \tag{26}$$

Из 24, 26 получаем (см. Appendix A3):

$$tg2\Theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \tag{27}$$

Подставив 24 в 19, получим:

$$L = -\frac{1}{2}(\overline{(n'_L)^c}m'n'_L + \overline{n'_L}m'(n'_L)^c), \quad n'_L = O^T n_L, \tag{28}$$

$m'_{1,2}$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Обозначим $m_i = \eta_i|m'_i|$. Тогда 28 перепишется так:

$$L = -\frac{1}{2}(\overline{(n'_L)^c}m\eta n'_L + \overline{n'_L}m\eta(n'_L)^c) = -\frac{1}{2}\bar{\chi}m\chi, \tag{29}$$

где $\chi = n'_L + \eta(n'_L)^c$, $\chi_i^c = \eta_i \chi$. Таким образом, η_i - С-четность поля χ_i.

24 можно записать так:

$$M = (U^+)^T m U, \quad U^+ = \sqrt{\eta} O^T, \tag{30}$$

где

$$U^+ = \sqrt{\eta} O^T, \quad \eta = diag(\eta_1, \eta_2). \tag{31}$$

Смешивание выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} (\sqrt{\eta_1})^* cos\Theta & (\sqrt{\eta_2})^* sin\Theta \\ -(\sqrt{\eta_1})^* sin\Theta & (\sqrt{\eta_2})^* cos\Theta \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Рассмотрим частный случай:

$m_D >> m_L, m_R; m_D > 0$. Из 25 и 27 получаем: $m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_L + m_R) \mp m_D$, $\Theta = \pi/4$, $\eta_1 \eta_2 = -1$, $m_{1,2} = m_D \mp \frac{1}{2}(m_L + m_R)$. Таким образом, в этом случае С-четности майорановских нейтрино противоположны, угол смешивания $\pi/4$, разность масс нейтрино много меньше их масс. Очевидна полная аналогия со случаем нейтральных каонов. Поле n в этом случае называется псевдо-Дираковским.

2.5 Механизм качелей (see-saw)

Продолжим пример из предыдущего параграфа и предположим, что $m_L = 0, m_D \simeq m_f$, где m_f - масса кварка или заряженного лептона того же поколения, $m_R = M >> m_f$. В этом случае

$$\Theta << 1, \tag{34}$$

$$m_1 = m_f^2/M << m_f, \quad \eta_1 = -1, \tag{35}$$

$$m_2 = M, \qquad \eta_2 = 1. \tag{36}$$

Поскольку в этом случае $\sin\Theta$ очень мал, то приблизительно

$$\nu_L = -i\nu_{1L} \ , \quad (\nu_R)^c = \nu_{2L}, \tag{37}$$

а Майорановские поля связаны с полями ν_L и ν_R соотношениями

$$\nu_1 = -i(\nu_L - (\nu_L)^c) \ , \quad \nu_2 = -i(\nu_R - (\nu_R)^c), \tag{38}$$

Рассмотренный механизм называется механизмом качелей (see-saw) [25]-[27] иерархии нейтринных масс. Суть его заключается в том, что сохранение лептонного числа L нарушается правым Майорановским массовым членом на масштабе M, который намного больше, чем масштаб, на котором нарушается электрослабая симметрия. Масштаб M может быть от нескольких TeV, как например в Право-левосимметричных моделях [28] до масштаба $GUT \sim 10^{14} - 10^{15}\ GeV$ или даже Планка $\sim 10^{19}\ GeV$. Привлекательность данного механизма заключается в том, что через соотношение 35 он может объяснить малость масс нейтрино по сравнению с массами других фундаментальных фермионов. Заметим, что аналогичный механизм может быть реализован и для Дираковских нейтрино.

В случае трёх поколений механизм "качелей"приводит к спектру масс Майорановских нейтрино с тремя малыми массами m_k и тремя очень большими массами

$M_k(k=1,2,3$ порядка масштаба нарушения сохранения лептонного числа. Это реализуется матрицей 21 с $M_L=0$ и такой M_R, что все её собственные значения много больше, чем элементы M_D:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \tag{39}$$

В этом случае массовая матрица блок-диагонализуется (с точностью до поправок порядка $(M_R)^{-1}M_D$) унитарным преобразованием

$$W^T M_{D+M} W \simeq \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где

$$W \simeq \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}(M_D)^{+}(M_R(M_R)^{+})^{-1}M_D & (M_D)^{+}(M_R)^{+-1} \\ -(M_R)^{-1}M_D & 1-\frac{1}{2}(M_R)^{-1}M_D(M_D)^{+}(M_R)^{+-1} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Матрицы для малых и больших масс даются выражением:

$$M_{light} \simeq -(M_D)^T(M_R)^{-1}M_D, M_{heavy} \simeq M_R. \tag{42}$$

Массовые собственные значения лёгких нейтрино определяются формой M_D и M_R. Заметим, что в право-лево-симметричных и SO(10) моделях матрица M_L в 21 может быть важна (см. например [29]).

В литературе обсуждаются две простые возможности([30], [31]):

1. Если $M_R = MI$, где I - единичная матрица, получается квадратичный закон see-saw:

$$M_{light} \simeq -\frac{(M_D)^T M_D}{M}, \tag{43}$$

и массы лёгких нейтрино даются выражением

$$m_k = \frac{(m_k^f)^2}{M}, (k = 1, 2, 3), \tag{44}$$

где m_k^f - масса кварка или заряженного лептона k-го поколения. В этом случае

$$m_1 : m_2 : m_3 = (m_1^f)^2 : (m_2^f)^2 : (m_3^f)^2. \tag{45}$$

2. Если $M_R = \frac{M}{M_D} M_D$, где M_D в знаменателе характеризует шкалу M_D, получается линейный see-saw:

$$M_{light} \simeq -\frac{M_D}{M} M_D, \tag{46}$$

и массы лёгких нейтрино даются выражением

$$m_k = \frac{M_D}{M} m_k^f, (k = 1, 2, 3) \tag{47}$$

В этом случае

$$m_1 : m_2 : m_3 = m_1^f : m_2^f : m_3^f. \tag{48}$$

Подчеркнём, что в любом случае see-saw механизм даёт "прямую"иерархию Майорановских масс лёгких нейтрино:

$$m_1 << m_2 << m_3 \tag{49}$$

2.6 Осцилляции нейтрино

Предположим, что левые токовые поля ν_{lL} (l меняется от 1 до n) представляют собой ортогональные комбинации левых компонент полей нейтрино с определенными массами:

$$|\nu_{lL}>=\sum_i U^*_{li}\nu_{iL}. \tag{50}$$

Здесь U_{li} - унитарная матрица смешивания, ν_i - поле нейтрино с массой m_i. Число таких нейтрино равно n в случае массового члена 2 (D-схема) и 12 (M-схема) и 2n в случае массового члена 19 (D+M-схема). Для вектора состояния нейтрино ν_l ($l = e, \mu, \tau$) имеем:

$$|\nu_l>=\sum_i U^*_{li}|i, L>, \tag{51}$$

где |i,L> - вектор состояния нейтрино с импульсом $\bar{p}$, массой m_i и отрицательной спиральностью. Пусть в результате некоторого слабого процесса образуется пучок нейтрино ν_l. Такой пучок в начальный момент времени описывается вектором $|\nu_l>$, и справедливо соотношение 51 (при этом предполагается, что разности масс нейтрино достсточно малы). В момент времени t вектор состояния пучка дается выражением:

$$|\nu_l>_t=e^{-iH_0t}|\nu_l> . \tag{52}$$

Далее, для такого пучка

$$H_0|i, L>=E_i|i, L>, \tag{53}$$

где $E_i = sqrtp^2 + m^2$. Получаем:

$$|\nu_l>_t=\sum_i e^{-iE_it}|i, L> U^*_{li}, \tag{54}$$

$|i,L>$ - вектор состояния нейтрино с массой m_l, который, используя унитарность матрицы U, можно выразить так:

$$|i,L>=\sum_{l'=e,\mu,\tau}|v_{l'}>U_{l'i}., \tag{55}$$

Подставляя 55 в 55, получим в случае D- и M- схем:

$$|\nu_l>_t=\sum_{l'}|\nu_{l'}>\left(\sum_{i=1}^{n}U_{l'i}e^{-iE_it}U^*_{li}\right), \tag{56}$$

Для D+M -схемы получим:

$$|\nu_l>_t=\sum_{l'}|\nu_{l'}>\left(\sum_{i=1}^{2n}U_{l'i}e^{-iE_it}U^*_{li}\right)+\sum_{l'}|\bar{\nu}_{l'L}>\left(\sum_{i=1}^{2n}U^*_{l'i}e^{-iE_it}U^*_{li}\right). \tag{57}$$

Здесь $|\bar{\nu}_{l'L}>$ - вектор состояния левого антинейтрино (стерильной частицы). Из 56 и 57 получаем амплитуду вероятности обнаружения $\nu_{l'}$ через время t после образования ν_l:

$$a_{\nu_{l'},\nu_l}(t)=\sum_i U_{l'i}e^{-iE_it}U_li^*, \tag{58}$$

которую можно записать также в виде:

$$a_{\nu_{l'},\nu_l}(t)=e^{-iE_jt}(\delta_{l'l}+\sum_i U_{l'i}(e^{-i(E_j-E_j)t}-1)U^*_{li}) \tag{59}$$

и вероятность

$$P_{\nu_{l'},\nu_l}(t)=|\sum_i U_{l'i}e^{-iE_it}U^*_{li}|^2. \tag{60}$$

Предполагая, что массы m_i малы по сравнению с импульсом, можно записать $E_i\simeq p+\frac{m_i^2}{2p}$. Тогда 60 перепишется так (см. Appendix A4):

$$P_{\nu_{l'}.\nu_l(\bar{\nu}_{l'},\bar{\nu}_l)}(R) = \sum |U_{l'i}|^2|U_{li}|^2 + 2\sum_{i>k}|U_{l'i}U^*_{li}U^*_{l'k}U_{lk}|cos(\frac{m_i^2 - m_k^2}{2p}R \pm \phi^{l'l}_{ik}), \quad (61)$$

где

$$\phi^{l'l}_{ik} = arg(U_{l'i}U^*_{li}U^*_{l'k}U_{lk}).,\quad (62)$$

Вероятность можно записать также в виде (см. Appendix A4):

$$P_{\nu_{l'},\nu_l(\bar{\nu}_{l'},\bar{\nu}_l)}(R) = \delta_{l'l} + 2\sum_{i>k}|U_{l'i}U^*_{li}U^*_{l'k}U_{lk}|(cos(\frac{m_i^2 - m_k^2}{2p}R \pm \phi^{l'l}_{ik}) - cos\phi^{l'l}_{ik}). \quad (63)$$

Из 59 и унитарности матрицы смешивания следует, что для того, чтобы осцилляции были возможны, необходимо:

1. чтобы массы нейтрино были разными,
2. чтобы недиагональные элементы матрицы смешивания были отличны от нуля.

Отметим некоторые свойства осцилляций.

1. Из унитарности матрицы смешивания следует:

$$P_{\nu_{l'},\nu_l}(t) = P_{\bar{\nu}_l,\bar{\nu}_{l'}}(t), \quad (64)$$

(Это общее соотношение является следствием CPT - инвариантности [32]).

2. Из унитарности матрицы смешивания для D- и M- схем имеем:

$$\sum_{l'} P_{\nu_{l'},\nu_l}(t) = 1, \sum_{l'} P_{\bar{\nu}_{l'},\bar{\nu}_l}(t) = 1 \quad (65)$$

Для D+M схемы

$$\sum_{l'} P_{\nu_{l'},\nu_l}(t) + \sum_{l'} P_{\bar{\nu}_{l'L},\nu_l}(t) = 1, \quad (66)$$

$$\sum_{l'} P_{\nu_{l'},\nu_l}(t) + \sum_{l'} P_{\nu_{l'R},\bar{\nu}_l}(t) = 1 \tag{67}$$

То есть общее число нейтрино, между которыми возможны преходы, сохраняется.

3. Если имеет место CP- инвариантность (матрица смешивания вещественна), то [32]

$$P_{\nu_{l'},\nu_l}(t) = P_{\bar{\nu}_{l'},\bar{\nu}_l}(t). \tag{68}$$

CP-инвариантность всегда имеет место в случае смешивания двух нейтрино.

4. Осцилляции в случае D- и M- схем полностью эквивалентны.

Рассмотрим теперь подробнее случай осцилляций между двумя нейтрино. Такие осцилляции характеризуются всего двумя параметрами (углом смешивания и разностями квадратов масс нейтрино). Данные большинства опытов по поиску осцилляций нейтрино анализируются в этом простейшем предположении. В этом случае

$$\begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ \nu_{l'L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\Theta & sin\Theta \\ -sin\Theta & cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \tag{69}$$

Из общего выражения 63 получаем:

$$P_{\nu_{l'},\nu_l}(R) = \frac{1}{2} sin^2 2\Theta (1 - cos\frac{\Delta m^2 R}{2P}), \tag{70}$$

$$P_{\nu_l,\nu_l}(R) = 1 - \frac{1}{2} sin^2 2\Theta (1 - cos\frac{\Delta m^2 R}{2P}) \tag{71}$$

Здесь $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$.

Для расстояния в метрах получаем:

$$P_{\nu_{l'},\nu_l}(R) = \frac{1}{2}sin^2 2\Theta(1 - cos2.54\frac{\Delta m^2 R}{P}). \quad (72)$$

Здесь Δm^2 в eV^2, P в MeV/c, R в метрах. Из 72 видно, осцилляции могут наблюдаться в случае, если

$$\Delta m^2 = \frac{P}{R} \quad (73)$$

или

$$\Delta m^2 >> \frac{P}{R}. \quad (74)$$

Параметр $\frac{P}{R}$ характеризует чувствительность опыта по поиску осцилляций. В случае, если справедливо условие 74, получаем усредненные вероятности

$$P_{\nu_{l'},\nu_l}(R) = \frac{1}{2}sin^2 2\Theta, \quad P_{\nu_l,\nu_l} = 1 - \frac{1}{2}sin^2 2\Theta. \quad (75)$$

Величина $L_{osc} = 2\pi\frac{2P}{\Delta m^2}$

называется длиной осцилляции.

2.7 Осцилляции в веществе

В случае, если нейтрино взаимодействует с веществом, в выражении 54 появляется дополнительный фазовый множитель, и, если это взаимодействие разное для разных типов нейтрино, осцилляционная картина может меняться [33]. Нейтрино всех типов взаимодействует с веществом посредством нейтрального тока. Это взаимодействие одинаково для всех типов нейтрино, поэтому не влияет на осцилляции. Однако для электронных нейтрино может происходить взаимодействие в заряженном токе с электронами вещества:

$$\nu_e + e^- \to e^- + \nu_e. \tag{76}$$

Энергия свободной частицы заменится на

$$E_{eff} = p^2 + \frac{m^2}{2p} =< e\nu|H_{eff}|e\nu >, \tag{77}$$

где

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\mu\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu. \tag{78}$$

Находим

$$< e|\bar{e}\gamma^\mu(1-\mu_5)e|e >= N_e\delta_{\mu 4} \quad < \bar{\nu}|\bar{\nu}\gamma_4(1-\gamma_5)\nu|\nu >= 2. \tag{79}$$

Отсюда

$$E_{eff} = p + \frac{m^2}{2p} + \sqrt{2}G_F N_e \tag{80}$$

где N_e - плотность электронов.

Рассмотрим прохождение через вещество двух нейтрино с ароматами e и L,

$$\nu_e = \nu_1 cos\Theta + \nu_2 sin\Theta \tag{81}$$

$$\nu_L = -\nu_1 sin\Theta + \nu_2 cos\Theta, \tag{82}$$

где ν_1, ν_2 - нейтрино с определенными массами;

$$\nu_1 = \nu_e cos\Theta - \nu_L sin\Theta \tag{83}$$

$$\nu_2 = \nu_e sin\Theta + \nu_L cos\Theta. \tag{84}$$

Запишем уравнения временной эволюции для свободных ν_1, ν_2:

$$i\frac{d}{dt}|\nu_1> = i\frac{d}{dt}|\nu_e> cos\Theta - i\frac{d}{dt}|\nu_L> sin\Theta \tag{85}$$

$$i\frac{d}{dt}|\nu_2> = i\frac{d}{dt}|\nu_e> sin\Theta - i\frac{d}{dt}|\nu_L> cos\Theta. \tag{86}$$

При включении взаимодействия к $i\frac{d}{dt}|\nu_e>$ добавится $\sqrt{2}G_F N_e|\nu_e>$, получим:

$$i\frac{d}{dt}|\nu_1> = \sqrt{2}G_F N_e|\nu_e> cos\Theta + \frac{m_1^2}{2p}|\nu_1> \tag{87}$$

$$i\frac{d}{dt}|\nu_2> = \sqrt{2}G_F N_e|\nu_e> sin\Theta + \frac{m_1^2}{2p}|\nu_2> . \tag{88}$$

Подставив ν_e из 82, получим:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2p} + \sqrt{2}G_F N_e cos^2\Theta & \sqrt{2}G_F N_e cos\Theta sin\Theta \\ \sqrt{2}G_F N_e cos\Theta sin\Theta & \frac{m_1^2}{2p} + \sqrt{2}G_F N_e sin^2\Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{89}$$

Диагонализовав матрицу в 89, получим:

$$\begin{pmatrix} \nu_{lm} \\ (\nu_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\Theta_m & -sin\Theta_m \\ sin\Theta_m & cos\Theta_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_L \end{pmatrix} \tag{90}$$

Здесь ν_{1m}, ν_{2m} "частицы проходящие через вещество как плоские волны, а новый угол смешивания Θ_m связан со старым Θ соотношением (см. Appendix A5):

$$tg2\Theta_m = tg2\Theta[1 + \frac{L_{osc}}{L_0 cos2\Theta}]^{-1}. \tag{91}$$

Здесь

$$L_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}G_F N_e} = \frac{1.7\times 10^7}{\rho\frac{Z}{A}} - \tag{92}$$

характеристическая длина осцилляций в веществе [33] - [35] (L_0 в метрах, ρ здесь в g/cm^3). Новая длина осцилляций

$$L_m = L_{osc}\left[1+\frac{L_{osc}^2}{L_0^2}+\frac{2L_{osc}}{L_0}\dot{c}os2\Theta\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (93)$$

Особенность формулы 91 состоит в явлении "резонанса"[9], т.е. при $\frac{L_{osc}}{L_0} = -cos2\Theta$ $sin^2 2\Theta_m = 1$ при любых Θ. Длина осцилляций при резонансе увеличивается: $L_{osc.res} = \frac{L_{osc}}{sin2\Theta}$. Этот эффект может иметь значение для солнечных нейтрино, которые, вылетая из областей Солнца, близких к центру, проходят через вещество с плотностью, меняющейся в широких пределах. Если на какой-то глубине нейтрино встречает резонансную плотность электронов

$$n_e = \frac{\Delta m^2 cos2\Theta}{2V2G_F E_\nu} \quad (94)$$

то, как можно показать [36] - [39], вероятность остаться нейтрино того же аромата выражается формулой Ландау-Ценнера:

$$P = exp(-\frac{\epsilon}{E_\nu}), \quad (95)$$

где

$$\epsilon = \frac{\pi H_r \delta m^2 sin^2 2\Theta}{4cos2\Theta}, \quad H_r = |(n_e/(dn_e/dr))| \quad (96)$$

формулу 96 можно переписать следующим образом:

$$P = exp(-\pi^2 W_r/L_{osc.res}), \quad (97)$$

где W_r - размер области, в которой происходит резонанс, т.е. расстояние, на котором $sin^2 2\Theta_m$ меняется от 1 до 0,5: $W_r = H_r tg2\Theta$. Формула 97 имеет, таким образом, следующий смысл: если длина осцилляций мала по сравнению с размерами области, то происходит почти полное превращение нейтрино в нейтрино другого типа.

Это можно понять с помощью следующих простых рассуждений. Пусть электронное нейтрино, в вакууме слабо смешанное с ν_x и состоящее в основном из ν_1 - более легкого нейтрино с определенной массой - рождается в области резонанса (или прилетает туда). Поскольку в этой области $sin^2\Theta \simeq 1$, то оно почти полностью состоит в этой области из ν_2. После вылета из области резонанса в адиабатическом случае это по-прежнему в основном ν_2, но здесь ν_2 - это в основном ν_x, т.е. происходит почти полное превращение.

2.8 Длина когерентности

Известная формула для осцилляций 72 была выведена с использованием ряда упрощений. Если рассмотреть задачу более подробно, используя понятие волновых пакетов, то формула несколько усложняется [40], а упрощенная формула становится ее предельным случаем, хорошо описывая реальность при выполнении нескольких условий. Самым важным является условие что расстояние от источника нейтрино до детектора намного меньше длины когерентности. Длину когерентности можно понять и оценить из следующих соображений. Предполодим, что источник локализован в интервале $\delta x = 1/\delta p$. Неопределенность фазы волновой функции нейтрино будет расти с расстоянием как

$$\delta\Phi(x) \approx \frac{\Delta m^2}{2p} \cdot \frac{\delta p}{p} x \tag{98}$$

Когерентность может поддерживаться до тех пор, пока $\delta\Phi(x) < 1$. Таким образом, за длину когерентности естественно принять расстояние до точки, где $\delta\Phi(x) = 1$. В статье [40] найдено, что длина когерентности равна

$$L^{coh} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{p_0}{\sigma_{peff}} L^{osc}, \tag{99}$$

где σ_{peff} - неопределенность начального импульса, зависящая от механизма рождения нейтрино. На расстояниях порядка длины когерентности осцилляции затухают по закону $e^{-(\frac{L}{L^{coh}})^2}$. Это затухание осцилляций можно понимать как расхождение волновых пакетов в пространстве, после чего осцилляции, возникающие за счет их интерференции, больше не могут происходить.

В обычных экспериментальных установках на ускорителях определенная так длина когерентности очень велика. Для качественной оценки возьмем распад $\pi \to \mu\nu$, примем за σ_{peff} ширину π-мезона, равную примерно $3 \cdot 10^{-8}$eV и будем считать π-мезон покоящимся, так что импульс нейтрино равен ~30 MeV. Длина когерентности в этом случае равна $\sim 10^{16}$ км.

2.9 Распады нейтрино

Смешивание нейтрино может проявляться не только через осцилляции, но и через спектры частиц от распадов мезонов, а также через распады тяжелых нейтрино на более легкие. Например если обычное электронное нейтрино ν_e (доминантное нейтрино) смешано через массовую матрицу с недиагональным элементом U_{eH} с тяжелым нейтрино ν_H (субдоминантное тяжелое нейтрино), то в распаде $K \to e\nu_e$ будут возникать также и ν_H. Вероятность возникновения таких нейтрино определяется величиной $|U_{eH}|^2$ и кинематическим фактором [41]. В этом случае спектр заряженных лептонов будет изменен (например дополнительные пики), и это можно пытаться найти в эксперименте. Такие эксперименты были проведены [42], установлены ограничения на $|U_{lH}|^2$, где $l = e, \mu$.

Интересно, что упомянутый выше кинематический фактор может значительно усиливать распады на тяжелые нейтрино, увеличивая их примесь [41]. Это происходит, если распад мезона на обычное нейтрино подавлен фактором спиральности. В качестве примера можно привести упомянутый выше распад $K \to e\nu_e$. Он был бы полностью запрещен спиральностью если бы массы электрона и электронного нейтрино были равны нулю. Усиление распада на тяжелое нейтрино в этом канале может достигать фактора 10^5. Поэтому ограничения на $|U_{lH}|^2$ из спектров заряженных лептонов могут быть довольно жесткими [42].

Другой способ поиска субдоминантных тяжелых нейтрино - это поиск их распадов. Если тяжелое нейтрино ν_H более чем в 2 раза тяжелее электрона, то доминирующим будет распада $\nu_H \to e^+e^-\nu_e$, идущий через промежуточный W бозон. Ширина такого распада равна [41]:

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_{\nu_H}^5 |U_{eH}|^2 h(m_e^2/m_{\nu_H}^2) \tag{100}$$

здесь фактор фазового объема равен [41]:

$$h(a) = \sqrt{1-4a}(1 - 14a - 2a^2 - 12a^3) + 24a^2(1-a^2) ln \frac{1+\sqrt{1-4a}}{1-\sqrt{1-4a}} \tag{101}$$

Ширины распада одинаковы для дираковских и майорановских нейтрино.

В случае, если тяжёлое нейтрино смешано в основном с третьим поколением обычных нейтрино, диаграмма, рассмотренная выше приводит к τ-лептону в конечном состоянии, что возможно только для $m_{\nu_H} > m_\tau$. Для более лёгких ν_H доминирующими диаграммами распада тогда становятся диаграммы с нейтральным током, с тем же конечным состоянием $\nu_H \to e^+e^-\nu_e$ и $\nu_H \to 3\nu$. Первый распад тогда имеет ширину [44], [45]

$$\Gamma = K \frac{(1 + g_L + g_R) G_F^2 m_{\nu_H}^5 |U_{\tau H}|^2}{192\pi^3}, \tag{102}$$

где $g_L = -1/2 + sin^2\Theta_W$, $g_R = sin^2\Theta_W$, K=1(2) для дираковских (майорановских) нейтрино, и брэнчинг примерно 0.14 (доминирует в этом случае распад в 3ν).

2.10 Appendix A1

Рассмотрим матрицу MM^+. Это эрмитова матрица, ее собственные значения положительны. Для такой матрицы

$$MM^+ = Vm^2V^+, \tag{103}$$

где V - унитарная матрица, m^2 - диагональная матрица. Определим диагональную матрицу m: $mm = m^2$ Имеем:

$$M = VmU^+, \tag{104}$$

где $U^+ = m^{-1}V^+M$, поскольку, делая подстановку и помня, что V - унитарная, получаем: $M = Vmm^{-1}V^+M = VV^+M = M$

Матрица U - унитарная, поскольку, беря U^+ из (104) и используя (103), получаем: $U^+U = m^{-1}V^+MM^+Vm^{-1} = m^{-1}m^2m^{-1} = I$.

2.11 Appendix A2

Докажем, что массовая матрица для Майорановского массового члена симметрична. Используя свойства 9, мы можем записать Майорановский массовый член как

$$\frac{1}{2}\nu_L^T C^{-1} M \nu_L + h.c. = -\frac{1}{2}\nu_L^T (C^{-1})^T M^T \nu_L + h.c. \tag{105}$$

Для простоты ν' заменено ν. Второе выражение получено путем транспонирования первого (в целом это не матрица, не меняется после транспонирования). Отрицательный знак появился от перестановки фермионных полей. Матрица C и матрица M могут быть переставлены, они относятся к разным индексам.

Запишем $CC^{-1} = 1$ и транспонируют это: $(C^{-1})^T C^T = 1$, отсюда, учитывая свойство $C^T = -C$, имеем: $(C^{-1})^T C = -1$, отсюда $(C^{-1})^T = -C^{-1}$.

Поэтому из 105 получаем: $M^T = M$.

2.12 Appendix A3

$$O = \begin{pmatrix} cos\Theta & -sin\Theta \\ sin\Theta & cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \tag{106}$$

$$OmO^T = O \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} cm_1 & sm_1 \\ -sm_2 & cm_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2m_1 + s^2m_2 & cs(m_1 - m_2) \\ cs(m_1 - m_2) & s^2m_1 + c^2m_2 \end{pmatrix} \quad (107$$

$M_L = c^2m_1 + s^2m_2$

$M_R = s^2m_1 + c^2m_2$

$M_D = cs(m_1 - m_2)$

$m_1 - m_2 = \sqrt{(M_L - M_R)^2 + 4M_D^2}$

$M_L - M_R = m_1(c^2 - s^2) - m_2(c^2 - s^2) = (c^2 - s^2)(m_1 - m_2) = (1 - 2s^2)(m_1 - m_2) = cos2\Theta(m_1 - m_2)$

$cos2\Theta = \frac{M_L - M_R}{\sqrt{(M_L - M_R)^2 + 4M_D^2}}$

$tg2\Theta = \frac{2M_D}{M_L - M_R}$

2.13 Appendix A4

$|(U_{l'1}exp(-i(p + m_1^2/2p))U_{l1}^* + U_{l'2}exp(-i(p + m_2^2/2p))U_{l2}^*)|^2 =$

$(U_{l'1}exp(-i(p + m_1^2/2p))U_{l1}^* + U_{l'2}exp(-i(p + m_2^2/2p))U_{l2}^*) \times$

$(U_{l'1}exp(-i(p + m_1^2/2p))U_{l1}^* + U_{l'2}exp(-i(p + m_2^2/2p))U_{l2}^*)^* =$

$(U_{l'1}exp(-i(p + m_1^2/2p))U_{l1}^* + U_{l'2}exp(-i(p + m_2^2/2p))U_{l2}^*) \times$

$(U_{l'1}^*exp(i(p + m_1^2/2p))U_{l1} + U_{l'2}^*exp(i(p + m_2^2/2p))U_{l2}) =$

$|U_{l'1}|^2|U_{l1}|^2 + |U_{l'2}|^2|U_{l2}|^2 +$

$U_{l'1}U_{l1}^*U_{l'2}^*U_{l2}exp(i(m_2^2 - m_1^2)/2p) + U_{l'1}^*U_{l1}U_{l'2}U_{l2}^*exp(-i(m_2^2 - m_1^2)/2p)$.

Далее:

$exp(i \times arg)exp(i\Delta m^2/2p) + exp(-i \times arg)exp(-i\Delta m^2/2p) = exp(i(arg + \Delta m^2/2p)) + exp(-i(arg + \Delta m^2/2p)) = 2cos(arg + \Delta m^2/2p)$.

Для двух типов:

$|U_{l'1}|^2|U_{l1}|^2 + |U_{l'2}|^2|U_{l2}|^2 = 2sin^2\Theta cos^2\Theta = 2sin^2\Theta(1 - sin^2\Theta) =$ $2\frac{1-cos2\Theta)}{2}\frac{1+cos2\Theta}{2} = \frac{sin^2 2\Theta}{2}$.

2.14 Appendix A5

Без взаимодействия мы имеем следующее уравнение эволюции:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{108}$$

(мы пока пишем m^2 вместо $\frac{m^2}{2p}$ для упрощения формул).

Заменим $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ на $O^T\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$. Аналогично выкладкам в начале Appendix A3 имеем:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2m_1^2 + s^2m_2^2 & cs(m_1^2 - m_2^2) \\ cs(m_1^2 - m_2^2) & s^2m_1^2 + c^2m_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \tag{109}$$

Теперь включим взаимодействие (член взаимодействия обозначим F)

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2m_1^2 + s^2m_2^2 + F & cs(m_1^2 - m_2^2) \\ cs(m_1^2 - m_2^2) & s^2m_1^2 + c^2m_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \tag{110}$$

Эта матрица диагонализуется ортогональной матрицей (см. Appendix A3):

$$tg2\Theta_m = \frac{2cs(m_1^2 - m_2^2)}{(c^2 - s^2)m_1^2 + (s^2 - c^2)m_2^2 + F} = \frac{2cs(m_1^2 - m_2^2}{(2c^2 - 1)(m_1^2 - m_2^2) + F} \tag{111}$$

Заменим обратно m^2 на $\frac{m^2}{2p}$; $cs(m_1 - m_2)$ обозначим M_D, а $cos2\Theta(m_1 - m_2)$ обозначим $M_L - M_R$, как в Appendix A3:

$$tg2\Theta_m = \frac{2M_D\frac{(m_1+m_2)}{2p}}{(c^2 - s^2)m_1^2 + (s^2 - c^2)m_2^2 + F} = tg2\Theta\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + \frac{2pF}{cos2\Theta(m_1 - m_2)}} \tag{112}$$

мы получаем формулу 91:

$$tg2\Theta_m = tg2\Theta \frac{1}{1+\frac{2pF}{cos2\Theta(m_1^2-m_2^2)}} \tag{113}$$

Список литературы

[1] Понтекорво Б.М., ЖЭТФ, 1957, 33, стр. 549.

[2] Понтекорво Б.М., ЖЭТФ, 1958, 34, стр. 247.

[3] Понтекорво Б.М., ЖЭТФ, 1967, 53, стр. 1717.

[4] Gribov V., Pontecorvo B., Phys.Lett., 1969, B28, p.463

[5] Понтекорво Б.М., Письма в ЖЭТФ, 1971, 13, стр. 281.

[6] Bilenky S., Pontecorvo B., Phys.Lett., 1976, B61, p.248;
Fritzsch H., Menkovsky P., Phys.Lett., 1976, B62, p.72;
Eliezer S., Swift A., Nucl.Phys., 1976, B105, p.45.

[7] Kobayashi M., Maskawa K., Progr. Theor. Phys., 1973, 49, p. 652.

[8] Frampton P.H., Voge P., Phys. Rep., 1982, 82, p.339;
Capps R.H., Strobel C.L., Phys. Rev. D32(1985), p.257.

[9] Михеев С.П., Смирнов А.Ю., ЯФ, 1985, 42, стр. 1441.

[10] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579;
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264;
A. Salam, in Elementary Particle Theory, ed.. N. Svartholm (Almquist and Wiksll, Stockholm, 1968) 367.

[11] Maki Z., Nakagawa M., Sakata S., Prog.Theor.Phys., 1962, 28, p.870;
Nakagawa M. et. al., Prog.Theor.Phys., 1963, 30, p.727.

[12] S.T. Petcov, Yad. Fiz. **25**, 641 (1977)

[13] T.P. Cheng and L.F. Li, Phys. Rev. D **16**, 1425 (1977)

[14] B.W. Lee and R.E. Shrock, Phys.Rev. D **16**, 1444 (1977)

[15] L.L. Chau and W.Y. Keung, Phys. Rv. Lett. **53**, 1802 (1984)

[16] Bilenky S.M., Pontecorvo B., Lett. Nuovo Cimento, 1976, 17, p.569

[17] Bilenky S.M., Hosek J., Petkov S.T., Phys. Lett., 1980, 94B, p.495

[18] Кобзарев Н.Ю. и др., ЯФ, 1980, 32, с.1950.

[19] Barger et. al., Phys. Rev. Lett., 1980, 45, p.692

[20] Schechter J., Valle J.P., Phys. Rev., 1980, D22, p.2227

[21] G. Gelmini and M. Roncadelli, Phys. Lett. B **99**, 411 (1981)

[22] H. Giorgi et al., Nucl. Phys. B **193**, 297 (1983)

[23] J.E. Kim , Phys. Rep. **150**, 1 (1987)

[24] Bilenky S.M., Pontecorvo B., JINR, E2-82-722

[25] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in Supergravity, p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam, 1979

[26] T. Yanagida, Proc. of the Workshop on Unified Theory and the Baryon Number of the Universe, KEK, Japan, 1979

[27] R.N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. 44, 912 (1980).

[28] R.N. Mohapatra and P.B. Pal, Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 41, World Scientific, Singapore, 1991

[29] D. Chang, R.N. Mohapatra and M.K. Parida, Phys. Rev. Lett. 52, 1072 (1984); D. Chang and R.N Mohapatra, Phys. Rev. D 32, 1248 (1985); D.G. Lee and R.N. Mohapatra, Phys. Lett. B 329, 463 (1994).

[30] S.A. Bludman, D.C. Kennedy and P.G. Langacker, Phys. Rev. D 45, 1810 (1992)

[31] S.A. Bludman, D.C. Kennedy and P.G. Langacker, Nucl. Phys. B 374, 373 (1992)

[32] Cabibbo N., Phys. Lett., 1978, 72B, p.333

[33] Wolfenstein L., Phys. Rev. D17, p.2369 (1978)

[34] Lewis R.R., Phys.Rev., D21, 663 (1980)

[35] Langacker P. et al., Phys.Rev., D27, 1228 (1983)

[36] W.C.Haxton, Phys.Rev.Lett., 57 (1986), p.1271

[37] S.Parke, Phys.Rev.Lett., 57 (1986), p.1275

[38] A.Dar and A.Mann, Nature 325 (1987), p.790

[39] A.Dar et al., Phys.Rev., D35 (1987), p.3607

[40] M.Beuthe, hep-ph/0202068

[41] Shrock R.E., Phys. Rev., D24, 1232 (1981).

[42] Bryman D.A. et al., Phys. Rev. Lett., 50, 1546, (1983); Deutsche J.P. et al., Phys. Rev., D27, 1644 (1983)

[43] CHARM: Bergsma F. et al., Phys. Rev. Lett., 128, 361 (1983); CHARM: Dorenbosch J. et al., Phys. Lett., B166, 473 (1986); BEBC: Cooper-Sarkar A.M. et al., Phys. Lett., B160, 207 (1985);

[44] A.D. Dolgov, S.H. Hansen, G. Raffelt, and D.V. Semikoz, Nucl. Phys. B 590 (2000) 562.

[45] R.E. Shrock, Phys. Rev D 24 (1981) 1232 and 1275.

Neutrino oscillations

M.M. Kirsanov